Matière : Mathématique
Niveau : 3AC
Durée : 14 h

Fonctions linéaires et affines

Professeur : DiagnoMath
Année Scolaire : 2024/2025

Activité:

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

x	3	5	8
y	7	11	17

x	-4	2	7
y	-2	1	3.5

x	2	4	-4
y	3	6	-6

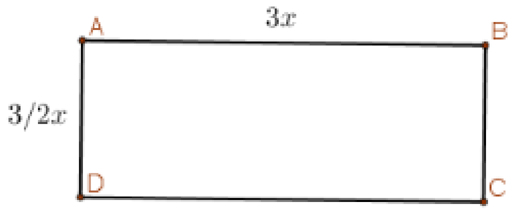
x	-2	0	3
y	4	0	-6

Si la réponse est oui

Déterminer le coefficient de proportionnalité

Activité :

a) Connaître la fonction linéaire



Soit P le périmètre de rectangle ABCD

Recopier et compléter le tableau ci-dessous

x	0.5	2	1	4.5
$P(x)$				

1) Montrer que ce tableau représente une situation de proportionnalité
2) Déterminer a le coefficient de proportionnalité
3) Écrire P(x) en fonction de x

Comparer a et le coefficient du fonction $P(x)$

b) Déterminer l'image d'un nombre par une fonction linéaire

On considère la fonction linéaire $f(x)$ définie par $f(x) = \frac{9}{2}x$

1. Calculer $f(1)$, $f(-3)$ et $f(4)$
2. Déterminer le nombre x dont l'image par la fonction linéaire f est 3

Déterminer les dimensions du rectangle ABCD sachant que son périmètre est 8 cm

I. Fonction linéaire :

La relation $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \frac{9}{2}\boldsymbol{x}$ et une relation qui associe le nombre réel x par le nombre réel $\frac{9}{2}\boldsymbol{x}$

Cette relation P s'appelle une fonction linéaire de coefficient $\frac{9}{2}$

1) Définition :

$\boldsymbol{a}$ Un nombre réel

La relation qui associe tout nombre réel x par le nombre $\boldsymbol{ax}$ s'appelle une fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$ et on écrit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{ax}$

Le nombre $\boldsymbol{ax}$ s'appelle l'image de $\boldsymbol{x}$ par la fonction linéaire $\boldsymbol{f}$ et on la note par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ telle que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$

Exemple :

$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont des fonctions définies par :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{3}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0x}$ et $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = -\sqrt{\boldsymbol{5}}\,\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont des fonctions linéaires de coefficients respectifs $\frac{1}{3}$, 0 et $-\sqrt{\boldsymbol{5}}$

On considère la fonction linéaire $\boldsymbol{f}$ définie par

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{9}{2}\boldsymbol{x}$$

- ✓ L'image de 5 par la fonction linéaire $\boldsymbol{f}$ est $\frac{45}{2}$

Car $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{5}) = \frac{9}{2} \times \boldsymbol{5} = \frac{45}{2}$

- ✓ L'image de 2 par la fonction linéaire $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{9}$

Car $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{2}) = \frac{9}{2} \times \boldsymbol{2} = \boldsymbol{9}$

- ✓ Le nombre dont l'image par la fonction f est $\frac{5}{2}$ est la solution de l'équation

$$f(x) = \frac{5}{2}$$

C'est-à-dire

$$\frac{9}{2}x = \frac{5}{2}$$

Alors

$$x = \frac{5}{9}$$

Donc

$$f\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{2}$$

Activité :

On considère la fonction linéaire f définie par : $f(x) = 3x$

1. Compléter le tableau suivant :

x	$f(x)$	$M(x\,;f(x))$
1		$A(1\,;\quad)$
2		$B(2\,;\quad)$
-3		$C(-3\,;\quad)$

2. Tracer les points A, B et C dans repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$
3. Que remarque-tu ?
4. Est-ce que $D(200\,;300)$ est aligné avec les autres points ?
5. Est-ce que $E(50\,;150)$ est aligné avec les autres points **?**

2) Coefficient d'une fonction linéaire :

On remarque que $\frac{g(2)}{2} = \frac{g(3)}{3} = \frac{g(-1)}{-1} = \frac{g(1)}{1} = 4$

Donc $\frac{g(x)}{x}$ $(x \neq 0)$ est le coefficient de la fonction g

Propriété

Si f est une fonction linéaire et x un nombre réel non nul alors le coefficient de la fonction f est le nombre réel $a = \frac{f(x)}{x}$

Exemple

f Est une fonction linéaire telle que $f(-5) = \frac{1}{2}$

$Calculer\ le\ coefficient\ de\ f\ et\ déterminer\ f(x)$

Exercice 1 :

On considère les deux fonctions linéaires f et g définie par

$$f(x) = 5x$$
$$g(x) = -3x$$

Et la fonction h définie par

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Et la fonction t telle que

$$t(x) = f(x) \times g(x)$$

1. Déterminer les coefficients de la fonction f et g
2. Calculer $f(2)$ et $g(2)$
3. Quel est le nombre dont l'image est 7 par la fonction f
4. Montrer que la fonction h est linéaire
5. Déterminer le coefficient de la fonction h
6. Calculer $h(1)$ et $h(\sqrt{2})$ racine de 2
7. Est-ce que t est une fonction linéaire ? justifier ta réponse

Exercice 2 :

On considère la fonction linéaire g telle que :

$$g(4) = -16$$

Calculer le coefficientde g et déterminer g(x)

Activité:

Pour organiser un voyage, un professeur demande le tarif à un compagnie de location de bus :

Il propose : 128 Dh à la réservation et 0,72 Dh par kilomètre parcouru.

On note $\boldsymbol{g(x)}$ le prix à payer à la compagnie pour x kilomètres

Recopier et compléter le tableau ci-dessous

$\boldsymbol{x}$	20	25	100	50
$\boldsymbol{g(x)}$				

1) Est- ce que le tableau représente une situation de proportionnalité ?
2) Écrire g(x) en fonction de x
3) Calculer $g(1)$ et $g(4)$
4) Calculer l'antécédent de 30

3) Représenter graphiquement une fonction linéaire.

Propriété :

$(O\,;I\,;J)$ Est un repère orthonormé dans le plan

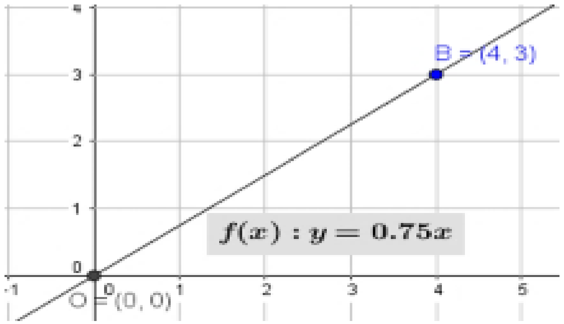
La représentation graphique de la fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine du repère.**

Exemple 1 :

On considère la fonction linéaire f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x = 0.75x$$

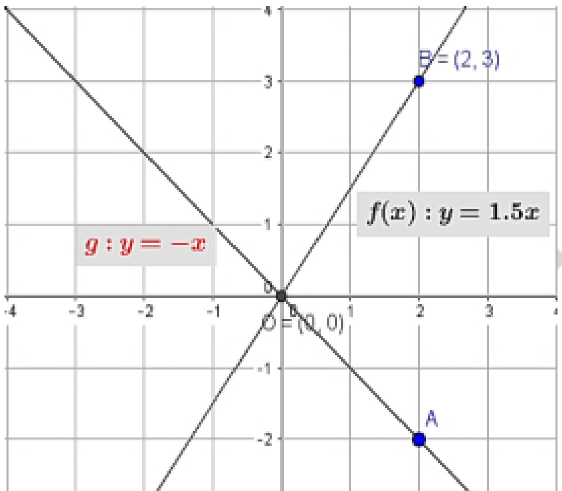
La représentation graphique de la fonction linéaire f dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ est la suivante :



Remarque

$M(x\,;y)$ Point appartient à la représentation graphique de la fonction linéaire f si et seulement si $f(x) = y$

Exemple 2 :



1) Déterminer graphiquement $f(3)$ et $g\left(\frac{-2}{5}\right)$

2) Déterminer graphiquement l'antécédent de 4 par f et g

3) Déterminer le coefficient de f et g

4) Calculer $f(4)$

5) Détermine l'expression de la fonction f et g

6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice 3 :

On considère la fonction linéaire h définie par :

$$h(x) = -2x$$

Tracer la représentation graphique de la fonction linéaire h dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$

Exercice 4 :

f Fonction linéaire et

(D) Sa représentation graphique

$M(-2\,;3) \in (D)$

1. Déterminer le coefficient de f

2. Détermine la fonction f.
3. Tracer (D)

Activité :

Pour organiser un voyage, un professeur demande le tarif à un compagnie de location de bus :
Il propose : 128 Dh à la réservation et 0,72 Dh par kilomètre parcouru.
On note $g(x)$ le prix à payer à la compagnie pour x kilomètres
Recopier et compléter le tableau ci-dessous

x	20	25	100	50
$g(x)$				

1) Est- ce que le tableau représente une situation de proportionnalité ?

2) Écrire g(x) en fonction de x

3) Calculer $g(1)$ et $g(4)$

4) Calculer l'antécédent de 30

II. Fonction affine

La relation $g(x) = 0.72x + 128$ et une relation qui à tout nombre réel x associe le nombre réel

$0.72x + 128$

Cette relation g s'appelle une fonction affine de coefficient 0.72

1) Définition :

a , b Deux nombres réels

La relation qui associe tout nombre réel x par le nombre $ax+b$ s'appelle une fonction affine de coefficient a et on écrit $f: x \to ax+b$

Le nombre $ax+b$ s'appelle l'image de x par la fonction affine f et on la note par $f(x)$ telle que

$f(x) = ax + b$

2) Exemple :

f, g et h sont des fonctions définies par :

$f(x) = \frac{x}{2} + 5$, $g(x) = 0x + 6$ et $h(x) = -\sqrt{3}\,x + \frac{4}{3}$

f, g et h sont des fonctions affines de coefficients respectifs $\frac{1}{2}$, 0 et $-\sqrt{3}$

On considère la fonction linéaire f définie par

$$f(x) = 2x + 1$$

- L'image de 5 par la fonction linéaire f est 11

Car $f(5) = 2 \times 5 + 1 = 11$

- L'image de 2 par la fonction linéaire f est 5

Car $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

- Le nombre dont l'image par la fonction f est 13 est la solution de l'équation

$f(x) = 13$

C'est-à-dire

$$2x + 1 = 13$$

Alors

$$x = \frac{13 - 1}{2} = 6$$

Donc

$$f(6) = 13$$

Exercice 6 :

On considère les deux fonctions affine f et g définie par

$$f(x) = -3x + 5$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - 5$$

Déterminer les coefficients de la fonction f et g

1. Calculer $f(1)$; $g(3)$; $f\left(\frac{1}{5}\right)$; $g\left(\frac{3}{5}\right)$; $f(\sqrt{5})$
2. $f(1 + \sqrt{2})$; $f\left(-1 + \sqrt{3}\right)$;

   $f[g(-8)]$

3. Quel est le nombre dont l'image est 7 par la fonction f et g

Activité :

g Fonction affine définie par :

$$g(x) = 4x + 1$$

a) Calculer $\frac{g(2)-g(1)}{2-1}$ $\quad \frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}$

b) Que remarque-tu ?

3) Coefficient d'une fonction affine

On remarque que $\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = \frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)} = 4$

Donc $\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ $(x \neq y)$ est le coefficient de la fonction g

- **Propriété**

Si f est une fonction affine et x , y deux nombres réels différents alors le coefficient de la fonction f est le nombre réel

$$\boldsymbol{a} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Exemple :

h Est une fonction affine telle que $h(-5) = \frac{1}{2}$ et $h(2) = -8$

$Calculer\ le\ coefficient\ de\ h\ et\ déterminer\ h(x)$

Exercice 7 :

On considère la fonction affine g telle que :

$g(2) = -1$ Et

$g(5) = 7$

$Calculer\ le\ coefficient\ de\ g\ et\ déterminer\ g(x)$

Activité :

On considère la fonction linéaire f définie par : $f(x) = 3x + 4$

6. Compléter le tableau suivant :

x	$f(x)$	$M(x\,;f(x))$
1		$A(1\,;\quad)$
2		$B(2\,;\quad)$
-3		$C(-3\,;\quad)$

7. Tracer les points A, B et C dans repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$
8. Que remarque-tu ?
9. Est-ce que $D(200\,;300)$ est aligné avec les autres points ?

Est-ce que $E(50\,;154)$ est aligné avec les autres points ?

4) Représenter graphiquement une fonction affine

Propriété :

$(O\,;I\,;J)$ Est un repère orthonormé dans le plan

La représentation graphique de la fonction affine est une droite

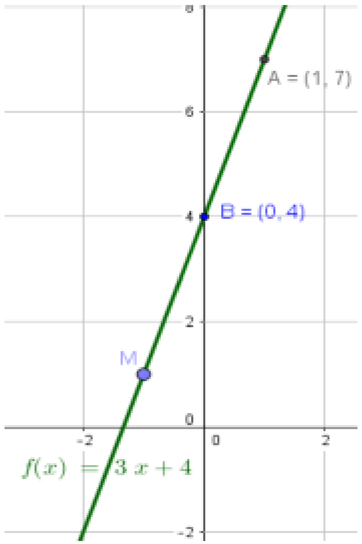
Exemple 1

On considère la fonction affine f définie par :

$$f(x) = 3x + 4$$

x	1	0
$f(x)$	7	4
$M(x\,;f(x)$	$A(1\,;7)$	$B(0\,;\,4)$

La représentation graphique de la fonction affine f dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ est la suivante :



Remarque :

- $M(x\,;y)$ Point appartient à la représentation graphique de la fonction affine f si et seulement si $f(x) = y$
- Pour construire la représentation de la fonction affine, il suffit de tracer deux points de cette droite

Exercice 9 :

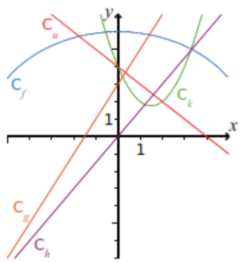
f, g Deux fonctions telles que $f(x) = \frac{4}{3}x$ et

$g(x) = 2x + 2$

1. Tracer la représentation graphique de f et g dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$
2. Déterminer graphiquement le nombre qui a la même image par la fonction f et la fonction g

Exercice 10 :

Sur le graphique ci-dessous, des fonctions f, g, h, k et u ont été représentées.



Parmi ces fonctions, indique celles qui sont affine.